**Autovalore:** è quel numero tale che con che si chiama **autovettore**

**Equazione caratteristica di F:** Pf() -> è l’equazione che ci trova gli autovalori, di grado N (quindi avremo N autovalori, dimensione dello **Spettro**)

Ha **n** soluzioni in C (anche complesse quindi) il cui insieme è detto **Spettro**.  
Più autovalori uguali vanno scritti una sola volta nello spettro: hanno **molteplicità algebrica** = numero di volte in cui compaiono nella soluzione di .

**Autovettori:** si calcolano per ogni con dove

**Autospazio:** è lo spazio geometrico generato dagli autovettori: il numero di autovettori trovati indica la **molteplicità geometrica di un autovalore.**

**PROPRIETÀ:**

* Det(F) = prodotto degli autovalori
* Tr(F) = somma degli autovalori
* Se un autovalore è 0, F non è invertibile (dato che il det(F) sarà = 0)
* Autovalori inversa di F = (per ogni autovalore)
* Gli autospazi di F e F inversa sono uguali
* Proiezione ortogonale su piano α data matrice associata P (idempotente, det(P)=0)
* Matrice diagonale e triangolare (sup, inf): gli autovalori sono sulla diagonale
* Se ho allora gli autovalori sono e gli autospazi non cambiano

se viene dato ker(F) si ha E0, e quindi almeno un autovalore sarà 0

se ci viene data una retta abbiamo anche il piano che vi è perpendicolare avente

**Matrici simili**

Due matrici quadrate A e B sono simili se e solo se esiste una matrice C invertibile tale che

dove C è detta matrice di transizione.

Se due matrici sono simili hanno determinante e traccia uguale, ma non per forza viceversa.

La **Lamdona** è una matrice simile ad A, è diagonale, e ha sulla diagonale tutti gli autovalori di A (il resto 0)

La **Matrice** **transizione** si ottiene dagli autovettori di A, si indica con **S**, nella quale ogni colonna è composta da un qualsiasi autovettore : attenzione a rispettare l’ordine degli autovalori inseriti nella lambdona.  
Essa deve essere invertibile, quindi devo scegliere vettori tutti lin. ind. tra loro.  
Cio è possibile se e solo se la m.a di ogni autovalore di A è uguale alla m.g.

Sia la lambdona che S non sono uniche, dato che: nella lambdona posso disporre gli autovalori a piacimento, e nella S indico un vettore , ma ogni vettore parallelo a andrebbe comunque bene.

**Diagonalizzazione**

È un processo matematico che ci permette di scrivere A come:

Se A è diagonalizzabile allora **m.a.()= m.g.()** (e viceversa)  
Questo calcolo posso verificarlo nella calcolatrice per vedere se ho trovato lambdona e S correttamente!!!

**Condizioni di esistenza di una matrice diagonalizzabile:**

* È diagonalizzabile se **esiste la**
* È diagonalizzabile se **m.a.()= m.g.()**
* Esempio: Se ho due autovalori distinti dovrò avere due autospazi da un vettore. Ad esempio, per verificare se non sia diagonalizzabile mi basta vedere che se due autovalori sono uguali allora questo autovalore con m.a. = 2 dovrà generare un autospazio con due vettori (m.g=2)

**Matrici simili**

A e B sono due matrici simili se esiste una matrice C tale che

Due matrici simili avranno sicuramente: det(A) = det(B) e tr(a) = tr(b)  
Non è detto però che se hanno determinante e traccia uguali che siano sicuramente simili! Bisogna verificare che esista una C che rispetti l’equazione fondamentale sopracitata.

Come trovare C:

* (ottenuta con moltiplicazione di C inversa)
* Sia C =
* Eseguo il calcolo (facendo attenzione all’ordine) ed eguaglio le due matrici risultanti valore per valore in un sistema.
* Metto tutto a primo membro in ogni equazione ed eseguo un rref() di questo sistema ottenuto.
* Otterrò una matrice in cui ogni riga vuota mi indicherà un grado di libertà
* Per ogni riga vuota, t , z , e così via…
* Devo verificare anche che esista la C inversa, quindi verificare che det(c) ≠ 0

**Potenza di matrice**

Se A è una matrice diagonalizzabile allora si ottiene da  quindi gli elementi della lambdona sono tutti elevati alla k (in calcolatrice infatti non elevo la lambona, ma elevo direttamente gli elementi interni)

Per calcolare una generica, al posto di k in calcolatrice metto @n1, ad esempio in modo da poter definire il comportamento della matrice A in base al variare di k (pari, dispari,....)

Se viene richiesto di calcolare una matrice ad un esponente specifico (ad esempio 999), devo **prima fare la generica** (mettendo quindi la lambdona elevata alla @n1) e poi sostituisco nella forma generica l’esponenente richiesto (non in calcolatrice perché non calcola numeri elevati!)

**Esponenziale di matrice**

Se A è diagonalizzabile allora metto gli elementi della lambdona =

Attenzione! -> se esce sinh nell’esponeziale di matrice trovato, **fare expand! (**vogliamo tutti con esponenziali)

**Costruzione matrice dato Spettro ed Autospazi**

Data una matrice F di dimensione n e dati i suoi autospazi:

* Conosco gli autovalori dato che sono l’indice degli autospazi (il numero di vettori che ha l’autospazio di un autovalore mi indica quante volte l’autovalore compare nello spettro, e quindi nella lambdona)
* Creo la lambdona dagli autovalori
* Creo la S dai vettori degli autospazi

**Teorema di Cayley-Hamilton**

Data una matrice A è possibile scriverla come combinazione di A e I

Esempio 🡪 allora e così via…   
Posso anche trovare l’**inversa** mettendo a sinistra il termine con la “I” e a destra il resto: poi moltiplico sinistra e destra per e divido per il coefficiente della “I” trovando l’inversa come combinazione lineare di A e I.

Posso ricavare anche il polinomio caratteristico (e quindi gli **autovalori**) mettendo tutto a primo membro e sostituendo le A con e la “I” con 1.

**Jordan**

Serve quando abbiamo m.a. ≠ m.g. (diagonalizzare matrici non diagonalizzabili).

J è una matrice triangolare superiore detta matrice di Jordan, M si costruisce con un algoritmo.

J è una matrice a blocchi formata diagonalmente da “mini matrici diagonali” che hanno sulla diagonale gli autovalori (come la lambdona!), solamente che nei blocchi degli autovalori che hanno m.a. ≠ m.g. vanno messi sopra agli autovalori tanti “1” quanto è la differenza di m.a. – m.g. di quell’autovalore:

Esempio:

M si trova con il seguente algoritmo:

* dove è il vettore che conosciamo dall’autospazio di λ
* Per trovare un nuovo vettore usiamo 🡪
* eventualmente se voglio trovare anche un altro vettore, e così via…
* Scrivo in calcolatrice 🡪 (conosco A, λ, )
* Mi esce un sistema da cui trovo (se mi escono infiniti vettori come risultato allora pongo ad esempio k = 0 prendendone quindi uno specifico)
* Proseguo con l’algoritmo in base a quanti vettori devo trovare (indicato da m.a. – m.g.)
* Verifico l’equazione fondamentale di Jordan per controllare che mi ritorni A con le J e M trovate.

**Potenza di matrice di Jordan:**

* Elevo alla k tutti gli elementi della diagonale di J
* Al posto degli “1” metto dove il λ è quello relativo al “blocco” in cui si trova l’1
* In calcolatrice metto k 🡪 @n1 e trovo la forma generica…

**Trasformazioni geometriche**

* **SIMMETRIA ASSIALE RISPETTO A UN PIANO:** la matrice deve essere idempotente dato che se faccio due volte la simmetria di un vettore riottengo lo stesso vettore, quindi .  
  S^n 🡪 se n pari = “I”, se n dispari = “S”  
  Posso usare quest’ultima uguaglianza per trovare eventuali parametri in S.  
  **In R3** 🡪 S = {-1, 1, 1} **In R2** 🡪 S = {-1, 1}. E1 indica il piano (o la retta), E0 indica la normale al piano **Risoluzione esercizio:** il piano è indicato dagli autovettori dell’autovalore che compare due volte. La normale del piano è parallela all’autovettore dell’autospazio dell’autovalore che compare una volta.  
  **SPIEGAZIONE:**
* **OMETETIA:** S = {k ,k, k} essendo essa una matrice diagonale
* **PROIEZIONE ORTOGONALE:** matrice non invertibile  
   perché se proietto n volte il vettore rimane sempre li **In R3** 🡪 S = {0, 1, 1} **In R2** 🡪 S = {0, 1}. E1 indica il piano (o la retta), E0 indica la normale al piano

**Norme matriciali**

Per definizione, la norma di A è uguale alla radice quadrata dell’autovalore massimo () della matrice

K(A) permette di calcolare la soglia massima raggiungibile dall’errore relativo sulla soluzione a fronte di un certo errore relativo sui dati (che deve essere “piccolo”):

per stabilire l’errore massimo raggiungibile su una soluzione si fa K(A) \* percentuale di errore sui dati

se A è reale simmetrica allora 🡪

Ps: se allora K(A) 🡪 ∞ e A inversa non esiste

Calcolo errore relativo:

* Calcolare prima la soluzione senza approssimare i dati
* Approssimare i dati e ricalcolare la soluzione
* per 100 e trovi la percentuale di errore sulla soluzione (dove è la differenza tra x non approssimato e x approssimato, e a denominatore c’è quello non approssimato)
* Stesso discorso per un eventuale calcolo dell’errore su un input b

Calcola gli autovalori di e calcola l’autospazio del maggiore.  
Allora ogni vettore che appartiene a quell’autospazio soddisfa la condizione.

**Risoluzione di sistemi di equazioni differenziali**

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Passaggi:

* Calcolo u(t)
* Nel caso mi dia un u(8) allora faccio u(t) tale che t=8 ed eguaglio u(8) al mio u(t)
* In genere se devo trovare un k sostituisco in u(t) la t data dalla condizione ed eguaglio coi dati conosciuti. Ricorda che ad esempio sarebbe la terza riga della u(t) sostituendo t=1

**Coordinate Omogenee e trasformazioni geometriche**

* Proiezione su retta: il vettore da usare nelle formule è u, non n.
* Per aumentare una matrice metto una riga e una colonna tutte a 0 con l’angolo in basso a dx = 1
* Per aumentare un punto (quindi un vettore) aggiungo un 1 sotto.
* Nel risultato devo leggere nell’ultima riga 0 0 … 1
* Matrice Traslazione: metto l’identità (di dimensioni uguale al vettore) in alto a sinistra, aggiungo una riga tutta a 0 con in fondo 1, e sopra a quell’1 metto il mio vettore.
* dove P1 è la matrice se passasse per l’origine, C = punto qls su retta/piano
* Se devo fare un operazione con una retta: per ottenere un vettore da moltiplicare con la matrice devo sommare riga per riga punto fisso e vettore direzione della retta

**Cenni teorici:**

* Matrice involutoria: se con k pari = I, con k dispari = A
* Triangolare superiore: ho gli elementi sulla e sopra la diagonale (sotto la diagonale tutti 0)
* Il determinante di una diagonale e triangolare è il prodotto della diagonale (e quindi degli autovalori)
* Per vettore perpendicolare(in R2) inverto le coordinate e cambio il segno a una
* Per vettore perpendicolare(in R3) metto una coordinata a 0, inverto le altre due e cambio il segno a una